Saggi

Piergiorgio Odifreddi

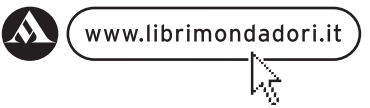
UNA VIA DI FUGA

Il grande racconto della geometria moderna

MONDADORI

Dello stesso autore
in edizione Mondadori

Il club dei matematici solitari del prof. Odifreddi
Hai vinto, Galileo!
C'è spazio per tutti
Caro papa, ti scrivo



Una via di fuga
di Piergiorgio Odifreddi
Collezione Saggi

ISBN 978-88-04-61368-8

© 2011 Arnoldo Mondadori Editore S.p.A., Milano
I edizione novembre 2011

Indice

3 *Premessa*
In fuga da Euclide

5 I L'arte dell'Alhambra. Gli Arabi
Non ti farai immagini di cose viventi, 6 – Questioni di forma, 10 – Ma che bel pavimento,15 – Omaggio all'esagono, 20 – Riflettiamo, prima di continuare, 28 – Fianco sinistro, avanti march!, 34 – La croce e la svastica, 37 – Greche egizie e arabe, 39 – Cristalli sognanti, 43

51 II Tutto dipende dai punti di vista. Da Brunelleschi a Desargues e Pascal
Apriamoci una via di fuga, 53 – La matematica in prospettiva, 57 – Distorcere, per meglio illudere, 62 – La vera cartomanzia, 67 – Le rette parallele si incontrano, finalmente, 74 – Un teorema piano veramente spaziale, 78 – I pensieri seri di Pascal, 79 – Poteri duali, 82

85 III Un visionario cieco. Eulero
Il Ciclope di corte, 86 – Genio pontieri, 88 – Morte di un commesso viaggiatore, 91 – Scacco alla matematica, 93 – Nascita di una disciplina, 96 – Giochiamo a colorare le mappe, 98 – Un'interessante caratteristica, 102 – Tre centri al buio, 107

109 IV Battere i Greci al loro stesso gioco. I giapponesi e gli europei
I cerchietti di madama Butterfly, 111 – Questo è un gioco da ragazzi, 118 – Una buona parte della storia, 124 – Lo strano caso del buco quadrato, 128 – Tripla trisezione, 134 – La tattica del ripiegamento, 137

147 V Il parricidio di Euclide. Da Saccheri a Bolyai e Lobačevskij
Teoremi per versi, 148 – Gli *Elementi* in tintoria, 152 – Colpi di testa, 156 – Le strida dei Beoti, 161 – La quadratura del cerchio, 164 – I nuovi princìpi della geometria, 170 – All'Inferno i moderni rivali di Euclide!, 173

177 VI Questa geometria è superficiale. Gauss e Riemann
Mettiamo le carte in tavola, 178 – Affrontiamo la chicane, 181 – L'apparizione della Santissima Trinità, 185 – Consultiamo la sfera, 189 – Il mondo com'è, 193 – Il mondo come lo vediamo, 198

207 VII Ormai siamo a cavallo. Beltrami
Il trattore e la trattrice, 209 – La cuffia della nonna, 213 – La dichiarazione di indipendenza, 217 – Poincaré si attacca al tram, 220 – Escher trova la sua strada, 223 – Sfilata di modelli, 231 – A qualcuno piace caldo, 239

241 *Ringraziamenti*

243 *Fonti iconografiche*

251 *Indice dei nomi*

Una via di fuga

Premessa

In fuga da Euclide

Divisa est in partes tres, diceva Cesare della Gallia, aggiungendo che i Belgi, gli Aquitani e i Celti «differiscono tutti fra loro per la lingua, le istituzioni e le leggi». Fatte le dovute proporzioni, com'è doverosa abitudine nella matematica, lo stesso si può dire della Geometria, delle sue scuole e della sua storia, che è naturale suddividere appunto in tre periodi: classico, moderno e contemporaneo.

Il *periodo classico* si estende dagli albori della concezione dello spazio alla fine dell'ellenismo, e ha visto il fiorire dei grandi nomi e dei grandi risultati che ancor oggi associamo alla geometria stessa. È il periodo dei primi oscuri segreti svelati lungo il Nilo dagli agrimensori egizi. Dei giochi sui raddoppi degli altari giocati dai bramini indiani. Della misura delle piramidi da parte del saggio Talete. Del teorema sui triangoli rettangoli del mistico Pitagora. Della classificazione dei cinque solidi regolari del platonico Teeteto. Dell'assiomatizzazione degli *Elementi* del grande Euclide. Degli *eureka* sul cerchio e sulla sfera del sommo Archimede. Dello studio delle sezioni coniche di Apollonio. Della misurazione della Terra di Eratostene, e del sistema solare di Aristarco. Della trigonometria di Ipparco. Del sistema geocentrico di Tolomeo.

È, in una parola, il periodo eroico di cui *C'è spazio per tutti* ha narrato la storia, sul finire della quale avevano iniziato a far capolino gli Arabi. La loro entrata in scena segna l'inizio del *periodo moderno*, caratterizzato da un ripensamento

globale dei fondamenti euclidei. È il periodo della geometria proiettiva, stimolata dall'invenzione della prospettiva. Delle scoperte che i Greci avevano mancato, benché fossero alla loro portata. Dello sfibrante e fallito tentativo di dimostrare il postulato delle parallele. Dell'esaltante e riuscita scoperta di una geometria non euclidea, in cui quel postulato è negato. Della costruzione di modelli che permettono di visualizzare quell'apparentemente inconcepibile mostro.

È questa la storia che narra *Una via di fuga*, approdando a una conclusione situata verso la fine dell'Ottocento. Una seconda conclusione che, ancora una volta, non è definitiva, come già non lo era stata la prima. L'abbattimento di un'ortodossia, infatti, ha come effetto una proliferazione delle apostasie. Lo sapeva bene Origene, che nelle sue *Omelie su Luca* notava: *Ecclesia quatuor habet Evangelia, haeresis plurima*, «la Chiesa di Vangeli ne ha quattro, le eresie molti». Non parliamo poi di una Chiesa come quella di Euclide, che di testo canonico ne aveva addirittura uno solo!

Il risultato del suo rinnegamento fu dunque un fiorire di nuovi *Elementi* apocrifi, per render conto dei quali sarà necessario un terzo e conclusivo volume che narri la storia del *periodo contemporaneo* della geometria. Ma per ora ci rivolgeremo al periodo moderno, e ci gusteremo il senso di liberazione e di freschezza che solo le idee nuove e rivoluzionarie possono infondere. Idee che, essendo meno note e scontate di quelle classiche, risulteranno più sorprendenti e inaspettate.

Manteniamo dunque aperto il nostro cuore alla matematica, e prepariamoci a innamorarci di nuovo e ancora. Come cantavano i Beatles nella loro ultima canzone, *The end*: «alla fine l'amore che riceveremo uguaglierà quello che avremo donato».

I

L'arte dell'Alhambra

Gli Arabi

Nel 711 gli Arabi passarono lo stretto di Gibilterra, e in breve tempo conquistarono la Spagna. L'intera penisola iberica, con la sola eccezione delle Asturie, divenne Al Andalus: un regno dapprima soggetto all'impero arabo, ma dal 756 sotto il governo autonomo dell'emiro di Cordoba. Un emiro che nel 929 arrivò a proclamarsi califfo, alla pari di quelli di Bagdad e Tunisi.

Per quasi un secolo il califfato prosperò, economicamente e culturalmente. Ma agli inizi del nuovo millennio incominciò a sgretolarsi, e perse lentamente un tassello dietro l'altro, Cordoba compresa. A metà del Duecento era ormai ridotto al sultanato di Granada, e costretto a pagare tributi al regno di Castiglia. Ma rimaneva comunque la spina nel fianco della cristianità, come ultima roccaforte musulmana in Europa.

Il suo destino fu segnato nel 1469, quando il matrimonio fra Ferdinando d'Aragona e Isabella di Castiglia pose le basi per l'unificazione della Spagna. Una volta saliti entrambi al proprio trono, i due re dedicarono i primi dieci anni di governo congiunto a chiudere i conti della Riconquista. E il 2 gennaio 1492 Granada capitolò, in seguito a un assedio di sei mesi.

Dopo aver emesso quello che passò alla storia come «l'ultimo sospiro del Moro», il sultano Boabdil consegnò le chiavi della città a Isabella, che vi entrò alla testa di un'interminabile processione, cantando il *Te Deum* e impugnando il crocifisso. Nonostante gli accordi, i Mori e gli Ebrei



Francisco Pradilla, *La resa di Granada*, 1882.

furono espulsi non solo dalla città, ma dal paese. E l'Inquisizione, istituita dalla regina e istruita da Torquemada, si impegnò a ripulire etnicamente la Spagna dai rimanenti convertiti, considerati una macchia e una minaccia alla purezza religiosa dei cattolici.

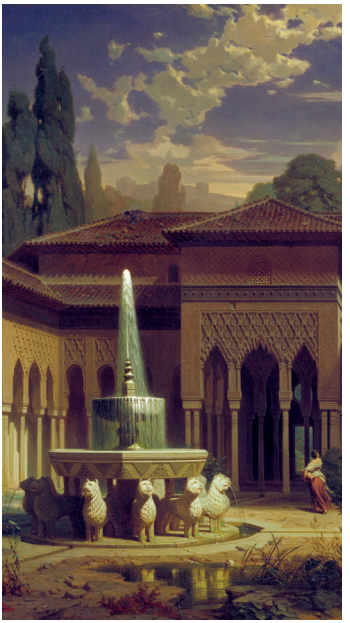
Il giorno della caduta di Granada uno spettatore di nome Cristoforo Colombo assistette allo spettacolo, e vi accennò in apertura del suo *Diario di bordo*. Dopo pochi mesi, finanziato da Ferdinando e Isabella, partì con tre caravelle alla ricerca di una nuova via per le Indie. Il 12 ottobre 1492 «scoprì l'America», e al suo ritorno la consegnò ai Re Cattolici. In uno stesso anno, così, terminò la Riconquista della piccola Spagna e iniziò la Conquista dell'immenso Nuovo Mondo, tutto da convertire e depredare.

Non ti farai immagini di cose viventi

La residenza dei sultani di Granada era l'Alhambra, «La (Fortezza) Rossa» che sovrasta la città, e i re spagnoli vi si trasferirono. Fu lì, ad esempio, che essi diedero a Co-



John Frederick Lewis e William Gauci, *Il cortile dei mirti e la torre di Comares*, da *Schizzi e disegni dell'Alhambra*, 1835.



Eduard Gerhardt, *Il cortile dei Leoni all'Alhambra*, 1861.



Veduta dall'alto dell'Alhambra a Granada.

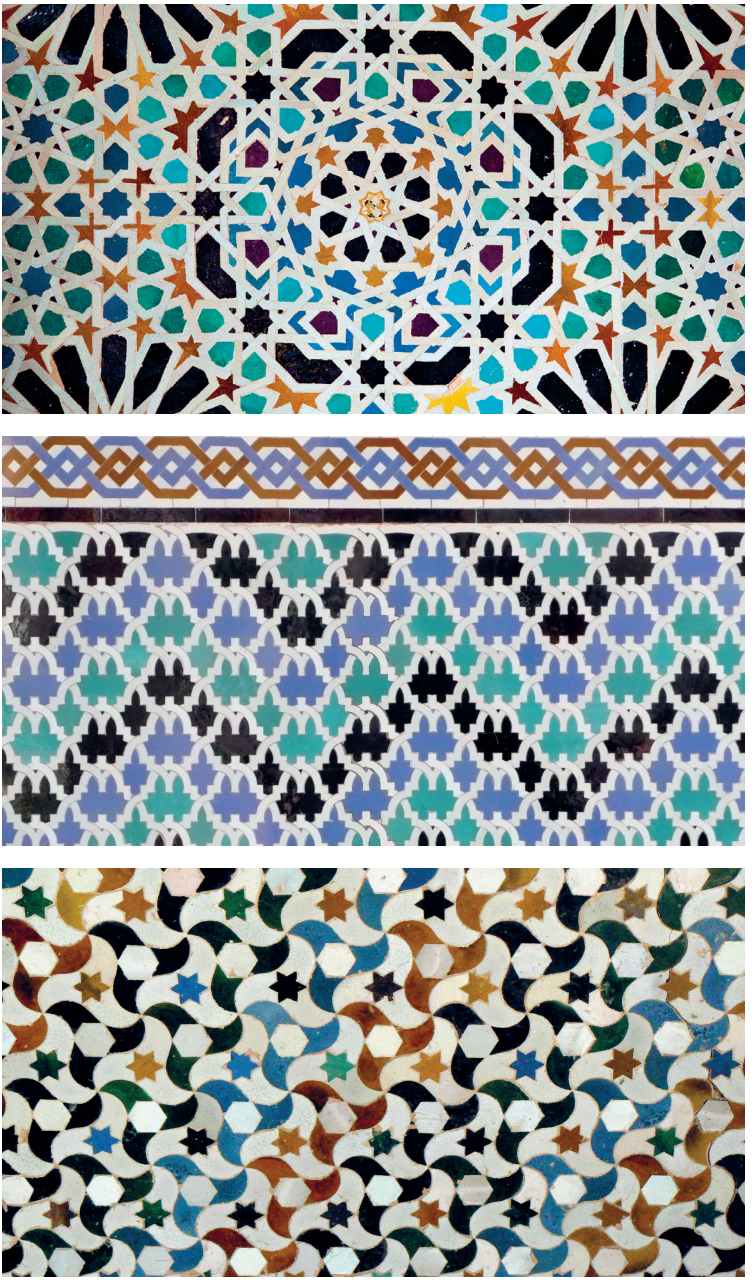
lombo il beneplacito per il suo primo viaggio. E fu lì che lo stesso Colombo venne processato nel 1500, dopo essere stato arrestato nelle Indie per quelli che oggi si chiamerebbero «crimini di guerra». Naturalmente l'avventuriero fu assolto, e ricevette un nuovo beneplacito per il suo quarto e ultimo viaggio, pur perdendo il titolo di viceré.

Non stupisce che l'Alhambra continuasse a essere una reggia anche sotto gli spagnoli, visto che i Mori ne avevano fatto una nuova meraviglia del mondo. All'originaria fortezza dell'Alcazaba, infatti, essi avevano gradualmente aggiunto nei secoli una serie di mura, porte, torrioni, palazzi, porticati, giardini e fontane, culminati nella perfezione architettonica del Palazzo dei Leoni. E i cristiani vi aggiunsero del loro: in particolare, il palazzo rinascimentale di Carlo V, le cui mura e il cui cortile costituiscono un quadrato circoscritto a un cerchio.

A impressionare, allora come ora, sono però soprattutto le astratte decorazioni policrome dell'intero complesso moresco. Gli Arabi, infatti, analogamente agli Ebrei, ma diversamente dai cristiani, prendono sul serio i Comandamenti. O, almeno, il secondo, che ordina esplicitamente: «Non ti farai idolo né immagine alcuna di quanto è lassù nel cielo, né di quanto è quaggiù sulla terra, né di ciò che è nelle acque sotto la terra».

Il legislatore dell'*Esodo* e del *Deuteronomio*, che per i credenti è Dio stesso, proibisce dunque, senza fraintendimenti, qualunque tipo di raffigurazione di uccelli, animali e pesci, e più generalmente della Natura. In una parola, pone divinamente fuori legge tutta l'arte figurativa che caratterizza la cultura cristiana, e di cui traboccano non solo i musei profani, ma anche gli edifici sacri!

Accettando una restrizione così radicale, gli Ebrei e gli Arabi furono costretti a rivolgersi all'arte astratta, che costituisce dunque l'unico ornamento delle sinagoghe e delle moschee. E, soprattutto, dell'Alhambra, i cui fregi forniscono una specie di catalogo illustrato di quelli che, non a caso, vengono chiamati «arabeschi». Su pavimenti, muri e soffitti della residenza moresca sono sistema-



Esempi di arabeschi dell'Alhambra.

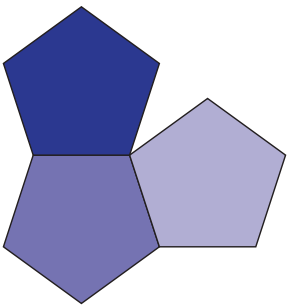
ticamente messe in pratica tutte, o quasi, le possibilità che la matematica permette in teoria, e che ora passiamo ad analizzare.

Questioni di forma

Prima che Teeteto classificasse i cinque solidi regolari, con un argomento simile al suo, ma più semplice, erano già state classificate le tre *pavimentazioni* o *tassellazioni regolari*: cioè, i tre poligoni regolari che possono, da soli, ricoprire l'intero piano, come piastrelle di un pavimento o tasselli di un mosaico.

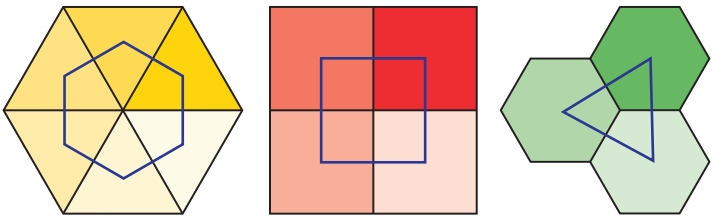
Anche in questo caso basta notare, anzitutto, che almeno tre piastrelle devono convergere in un vertice, altrimenti la figura non si chiuderebbe. Inoltre, la somma degli angoli dev'essere uguale a un angolo giro. Sono dunque esclusi tutti i poligoni regolari con un numero di lati maggiore di sei, perché a partire dall'ettagono i loro angoli sono tutti maggiori di un terzo di angolo giro.

Rimangono a disposizione i poligoni con al massimo sei lati, e di questi l'unico a venir escluso è il pentagono regolare, perché i suoi angoli sono compresi fra un quarto e un terzo di angolo giro: tre sono troppo pochi per chiudere la figura, e quattro sono troppi. Lo stesso motivo che permette l'esistenza del dodecaedro nello spazio ora impedisce dunque le tassellazioni pentagonali nel piano.



I tre rimanenti poligoni, e cioè il *triangolo*, il *quadrato* e l'*esagono*, hanno angoli pari a un sesto, un quarto e un terzo di angolo giro. Per coprire esattamente l'angolo giro,

se ne possono mettere rispettivamente sei, quattro e tre in ciascun vertice. E, ripetendo la cosa all'infinito, si può coprire l'intero piano.

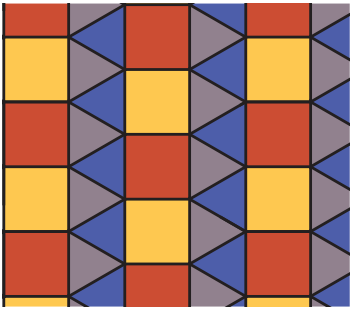
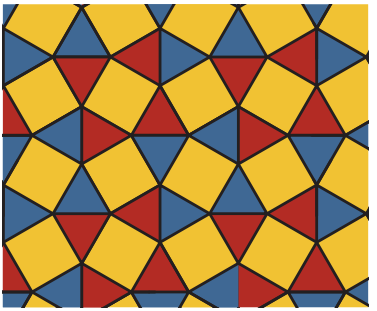
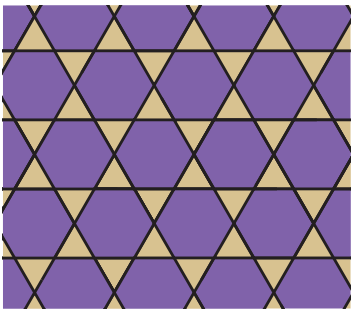
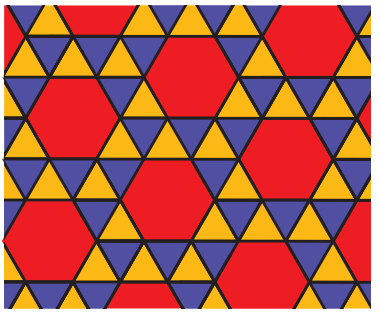
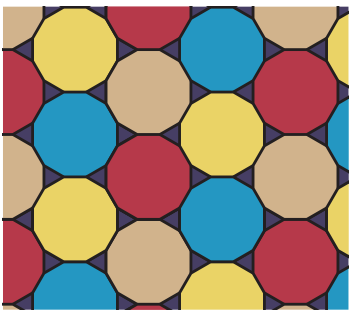
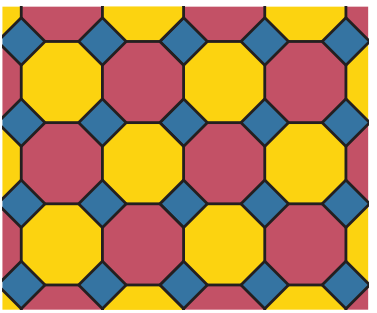
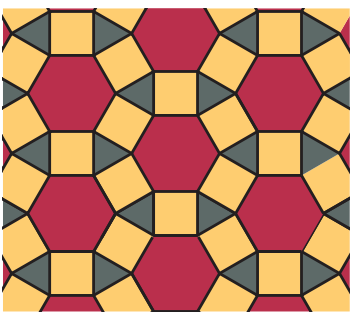
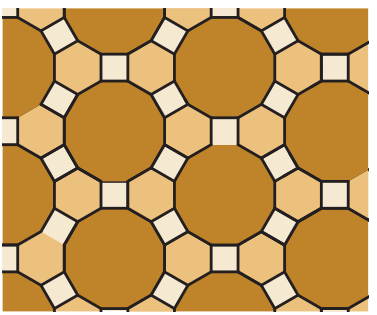


Esattamente come per i solidi regolari nello spazio, anche per le pavimentazioni regolari del piano si può parlare di *dualità* e *autodualità*. In ciascun vertice, infatti, si incontrano rispettivamente sei facce triangolari, quattro facce quadrate o tre facce esagonali. Unendo i centri delle varie facce, si sostituiscono i vertici con le facce e le facce con i vertici. Nel primo e nell'ultimo caso, si passa da una pavimentazione triangolare a una esagonale, e viceversa: esse sono dunque duali. Nel secondo caso, invece, da una pavimentazione quadrata si riottiene una pavimentazione quadrata, che è dunque autoduale.

Un argomento un po' più complicato di quello appena visto, ma dello stesso genere, permette di individuare le *otto pavimentazioni semiregolari*, che costituiscono l'analogo dei solidi semiregolari di Archimede. Si tratta, cioè, delle pavimentazioni che usano solo poligoni regolari, benché non tutti dello stesso tipo, e che ripetono sempre la stessa configurazione attorno a ciascun vertice.

Nel 1619, nell'*Armonia del mondo*, Keplero dimostrò che le pavimentazioni semiregolari sono appunto otto, così suddivise:

- Sei usano *due* soli poligoni. In cinque, uno è sempre il triangolo e l'altro può essere un quadrato (in due modi diversi), un esagono (in due modi diversi) o un dodecagono. Nella sesta i due poligoni sono un quadrato e un ottagono.

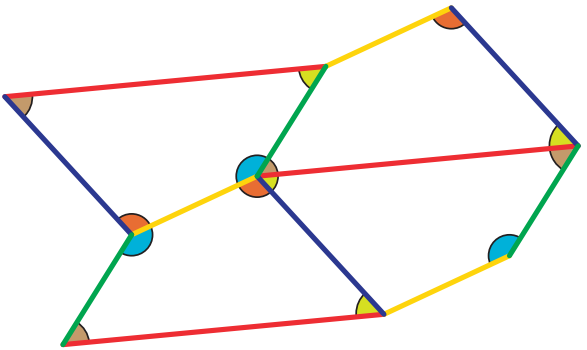


Salvador Dalí, *Cinquanta dipinti astratti che, visti a 2 iarde di distanza, si trasformano in tre Lenin travestiti da cinese e che, a 6 iarde, appaiono come la testa di una tigre reale*, 1962.

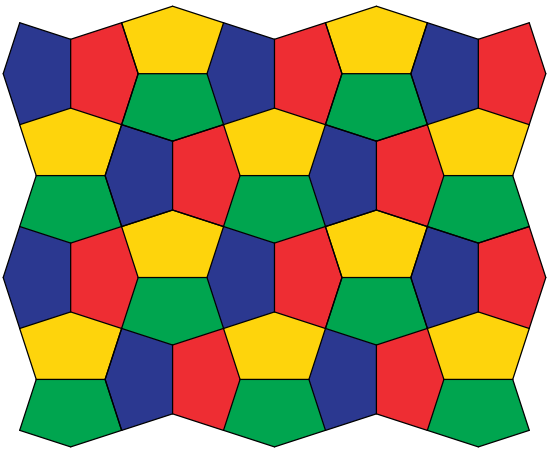
- Due usano *tre* poligoni. Precisamente, una il triangolo, il quadrato e l'esagono. E l'altra il quadrato, l'esagono e il dodecagono.

Lasciando cadere la restrizione ai poligoni regolari, le possibili pavimentazioni diventano infinite già con un solo tipo di piastrella. Ad esempio, *qualunque quadrilatero pavimenta l'intero piano*. Il motivo è, semplicemente, che la somma degli angoli di un quadrilatero è pari a quella di due triangoli, e dunque a un angolo giro. Disponendo opportunamente attorno a un vertice quattro copie del quadrilatero, due normali e due speculari, si chiude la figura. E la cosa si può ripetere indefinitamente.

Poiché un triangolo è la metà di un quadrilatero, si deduce subito che anche *qualunque triangolo pavimenta l'intero piano*.

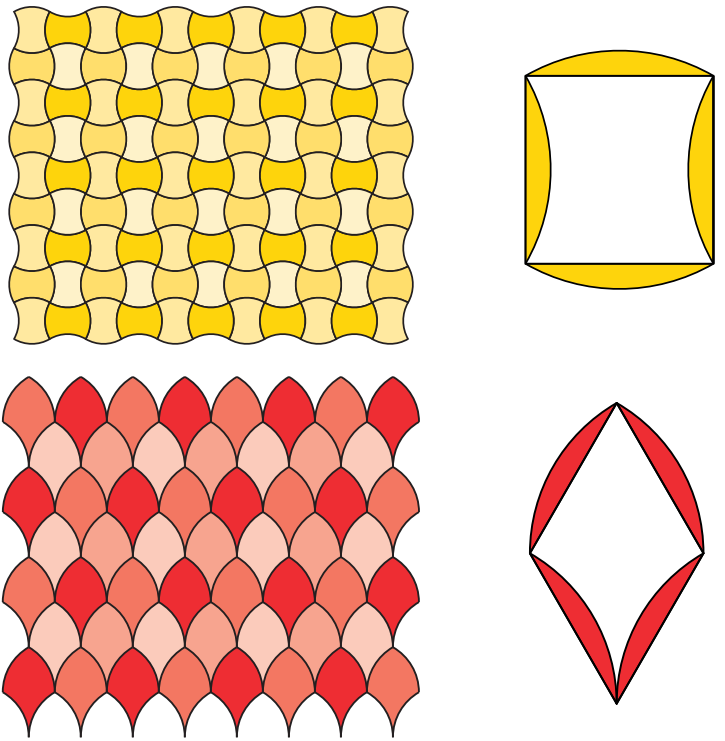


Un pentagono invece non sempre, e un controesempio è appunto il pentagono regolare. Ma ci sono pentagoni che pavimentano l'intero piano: come il cosiddetto «pentagono del Cairo», spesso usato nelle decorazioni della capitale egiziana, che ha due angoli retti, due angoli di 108 gradi e un angolo di 144 gradi.



Lo stesso succede con gli esagoni: alcuni pavimentano l'intero piano, ad esempio quelli regolari, e altri no. E la cosa finisce qui, perché *dagli ettagoni in su, nessun poligono convesso pavimenta l'intero piano*, dove «convesso» significa che contiene, insieme a due qualunque dei suoi punti, anche il segmento che li unisce: dimostrarlo è futile, ma non banale. Per quelli non

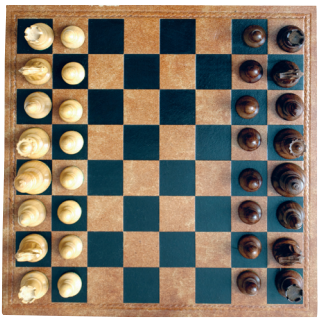
convessi, invece, non c'è limite: basta approssimare con poligonali aventi un numero arbitrario di lati le curve delle due seguenti piastrelle, ciascuna delle quali copre da sola il piano. Entrambe sono state usate nelle decorazioni dell'Alhambra, e sono note coi nomi di «osso» e «petalo».



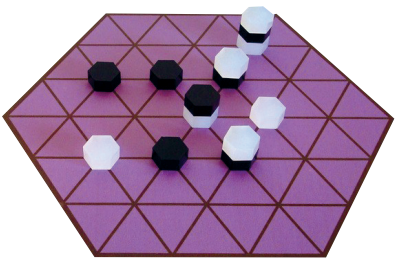
Ma che bel pavimento

L'applicazione più tipica delle pavimentazioni regolari del piano è ovviamente quella che dà loro il nome. Cioè, l'ubiquo uso che si fa delle piastrelle triangolari, quadrate o esagonali per ricoprire i pavimenti delle stanze. Anche alcune delle pavimentazioni semiregolari sono usate per lo stesso scopo: soprattutto, quella che combina piastrelle ottagonali e quadrate.

Benché queste pavimentazioni siano potenzialmente illi-







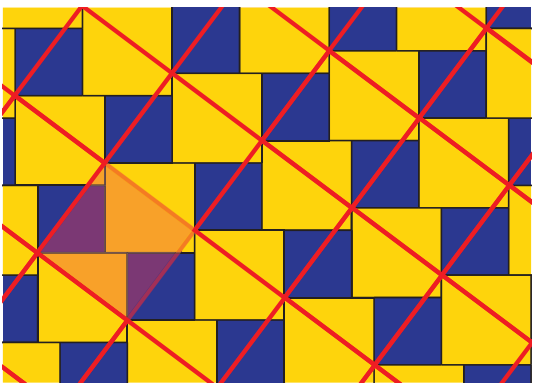
mitate, nella pratica se ne usano ovviamente soltanto parti limitate. Ad esempio, nelle scacchiere a celle quadrate, caratteristiche di giochi classici come la dama, gli scacchi e il *go*. O nelle scacchiere a celle esagonali, tipiche dell'Hex inventato nel 1942 da Piet Hein e riscoperto nel 1949 da John Nash. O nelle scacchiere a celle triangolari, usate in una serie di giochi recenti (Accasta, Abande, Attangle) derivati dal Lasca, inventato nel 1911 dal matematico e campione mondiale di scacchi Emanuel Lasker.

Fra le pavimentazioni regolari, quelle triangolari vengono impiegate abitualmente anche nelle costruzioni, a causa di una loro proprietà strutturale: per il criterio LLL (Lato-Lato-Lato), infatti, i triangoli sono rigidi e non deformabili. Il primo a brevettarle è stato James Warren nel 1848, per le travi che oggi portano il suo nome. Da allora esse vengono usate, con eventuali rinforzi, come campate di piccoli ponti. E anche come sostegni o pilastri per quelli più grandi, come nel Manhattan Bridge a New York.

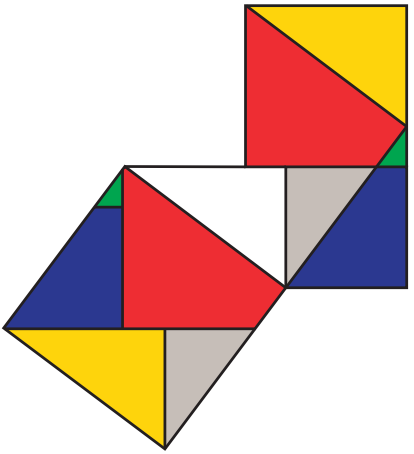


Il Manhattan Bridge a New York.

Di pavimentazioni non regolari, a volte se ne incontra una quasi regolare con due sole *piastrelle quadrate diverse*, che possono essere considerate come costruite sui cateti di un triangolo rettangolo. Questa pavimentazione equivale a una regolare con una sola piastrella quadrata, che può essere considerata come costruita sull'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo.



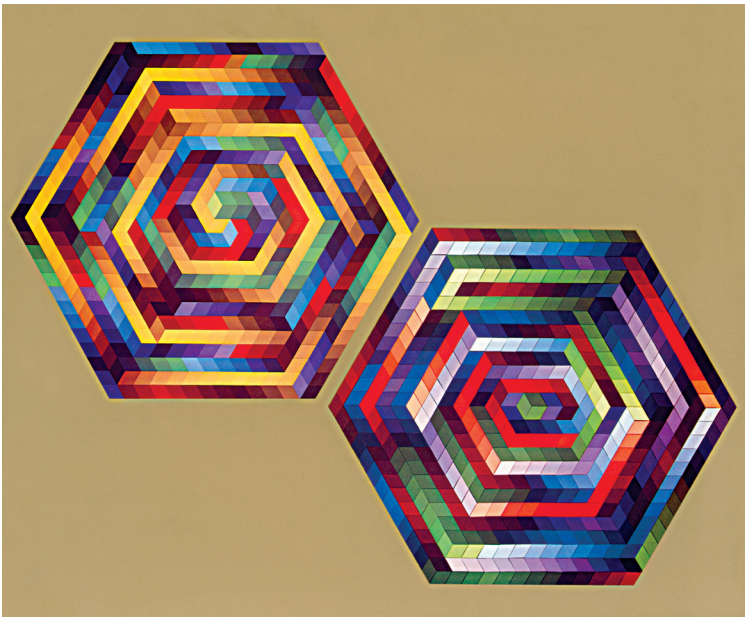
L'equivalenza delle due piastrellazioni costituisce un'ulteriore dimostrazione del teorema di Pitagora, per decomposizione e ricomposizione. È stata scoperta dal matematico arabo Thabit ibn Qurra verso il 900, e riscoperta dal matematico olandese Frans van Schooten verso il 1600.



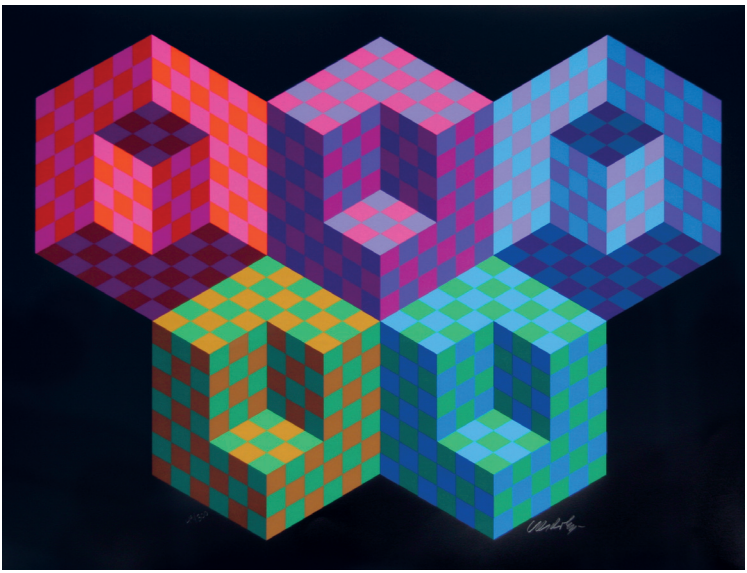
Naturalmente, nel caso che il triangolo rettangolo sia isoscele, si ottiene una doppia pavimentazione regolare autoduale, formata in un caso dal quadrato costruito sui cateti, e nell'altro caso dal quadrato costruito sull'ipotenusa.

Oltre che piastrelle regolari, per le pavimentazioni si possono usare anche *piastrelle irregolari*. Ad esempio, quelle a rombi, che producono l'effetto ottico dei cosiddetti *cubi reversibili*. I tre rombi adiacenti vengono infatti visti come le facce di un cubo, che possono alternativamente essere interpretate come interne o esterne. L'effetto si ha già con tre soli rombi. Ma quando ce ne sono di più, quelli interni possono appartenere a più di un cubo, e fanno sì che l'immagine venga percepita alternativamente come concava o convessa.

I cubi reversibili erano già noti ai Romani. Nel Novecento sono stati usati a profusione da Victor Vasarely, nella creazione di variopinte figure paradossali. E da Maurits Cornelis Escher, in *Convesso e concavo*.



Victor Vasarely, *Hat-C-II*, 1970, e *Hat-I*, 1971.



Victor Vasarely, *Hexa 5*, 1988.

Omaggio all'esagono

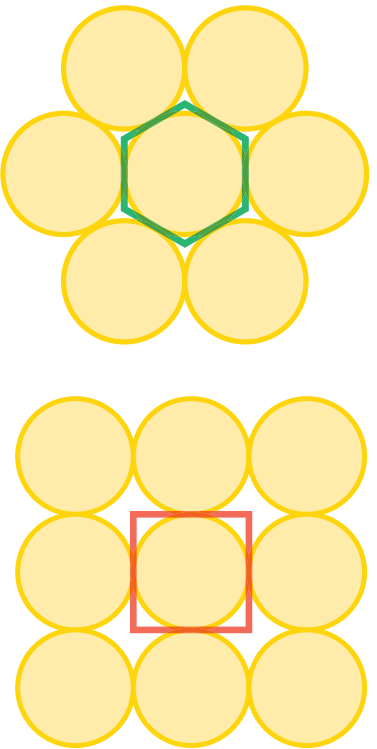
Oltre all'uomo, anche la Natura usa abbondantemente le pavimentazioni, più o meno regolari. La più conosciuta è certamente quella esagonale regolare messa in atto dalle api per la costruzione degli alveari. Già Pappo di Alessandria, nella prefazione al Libro V della sua *Synagogé*, «Raccolta» (da *syn*, «con», e *aghein*, «portare»), notava:

> La progettazione degli alveari segue un'intuizione geometrica. Le api sicuramente pensano che le celle devono essere contigue, per evitare che le impurità si inseriscano fra di esse e rendano scadente il miele. Possono dunque scegliere solo fra tre poligoni regolari, perché non si accontenterebbero certo di quelli irregolari. E fra i tre scelgono quello con il maggior numero di angoli, perché immaginano che conterrà la maggior quantità di miele.



Un conto, però, è capire perché le celle esagonali sono efficienti, e un altro risolvere il problema di come esse vengano costruite dalle api. La soluzione dovette attendere il 1611, quando nella strenna *Sul fiocco di neve* Keplero spiegò che la struttura esagonale emerge in maniera automatica:

basta costruire celle circolari identiche, e disporle in modo da lasciare fra loro il minor spazio possibile. Se invece le celle fossero disposte a scacchiera, lasciando un maggior spazio libero, si finirebbe per produrre automaticamente una struttura quadrata.



Le osservazioni di Pappo e Keplero portarono entrambe a due importanti sviluppi della matematica. La prima, allo studio delle figure isoperimetriche, «con lo stesso perimetro». La seconda, allo studio delle disposizioni di cerchi nel piano.

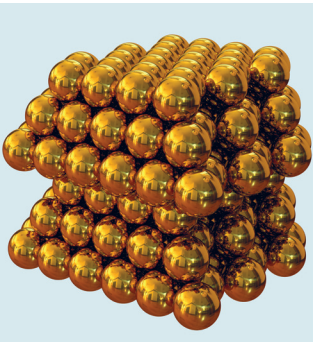
Ci vollero secoli per riuscire a dimostrare ciò che era apparentemente ovvio. E cioè, da parte dello svizzero Jakob Steiner nel 1838, che *il cerchio è la figura di area massima, a parità di perimetro*. E, da parte del norvegese Axel Thue

nel 1892, che *la disposizione esagonale occupa la minima area, a parità di cerchi*.

Ancora di più c'è voluto per risolvere l'analogo problema della disposizione di sfere identiche nello spazio, che era stato lo stimolo originale della strenna di Keplero. Soltanto nel 1998 Thomas Hales è riuscito a dimostrare ciò che, ancora una volta, era apparentemente ovvio: che *la disposizione che occupa il minor volume, a parità di sfere, è quella a strati esagonali sfasati*, le sfere di ciascuno dei quali riempiono gli avvallamenti del precedente.

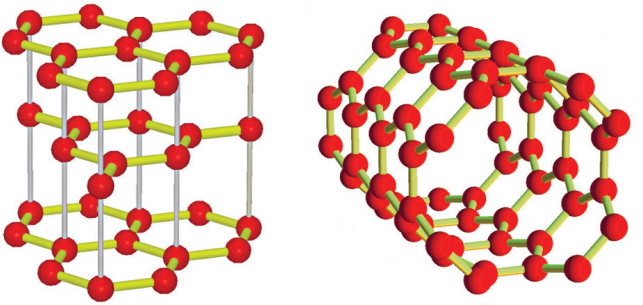
Senza aspettare il teorema, gli uomini hanno sempre impiegato questa disposizione, per impilare le palle da cannone o le arance! E la Natura anche, per impaccare gli atomi nei cristalli particolarmente densi: ad esempio, nell'oro puro.





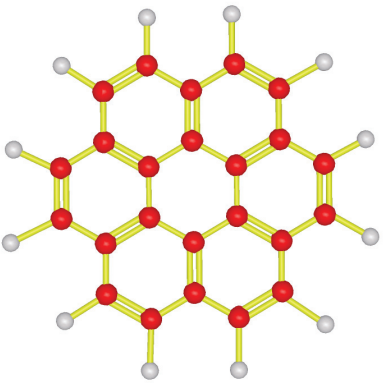
A parte gli alveari, un interessante esempio di pavimentazione esagonale naturale è il *grafene*, che è valso il premio Nobel per la fisica nel 2010 ad Andre Geim e Konstantin Novosëlov. Si tratta di uno strato bidimensionale di atomi di carbonio, disposti appunto a nido d'ape, che costituisce il mattone fondamentale di due tipi diversi di composti.

Da un lato, più strati di grafene sovrapposti l'uno all'altro producono la *grafite* tridimensionale. Dall'altro lato, uno strato di grafene arrotolato su se stesso produce dei *nanotubi* unidimensionali, scoperti nel 1991 da Sumio Iijima.



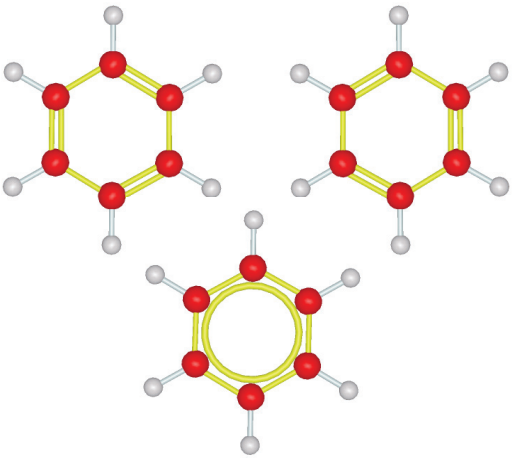
La struttura del grafene non è banale, perché in una pavimentazione esagonale i lati si incontrano a tre a tre nei vertici, mentre il carbonio ha quattro valenze: dunque, i legami tra i vari atomi non sono esauriti dai lati della pavimentazione. Alternando un legame in su e uno in giù nei vertici, si ottiene la *grafite*.

Quanto al grafene, si può pensare come il caso limite di strutture esagonali via via più grandi, la più semplice delle quali è il *coronene*. Quest'ultimo è un idrocarburo aromatico che si trova naturalmente nella carpathite, o karpatite, un minerale scoperto nella Transcarpazia (da cui prende il nome) e prodotto artificialmente nella raffinazione del petrolio. La sua struttura ($C_{24}H_{12}$) è formata da 24 atomi di carbonio, disposti a forma di sei esagoni raggruppati ad anello, e da 12 atomi di idrogeno appesi ai vertici esterni.



A sua volta, il coronene si può pensare come un anello formato da sei molecole di *benzene*: un altro idrocarburo aromatico, che si trova in natura come costituente del petrolio. La sua struttura (C_6H_6) è formata da 6 atomi di carbonio, disposti a forma di esagono, e da 6 atomi di idrogeno appesi ai vertici.

In ciascun esagono, ci sono due possibili realizzazioni teoriche della struttura. Nel 1865 August Kekulé intuì che nessuna delle due viene preferita dal benzene, e che esso «oscilla» fra di esse (oggi diremmo piuttosto che gli elettroni responsabili dei legami doppi sono delocalizzati, e il sistema è risonante).



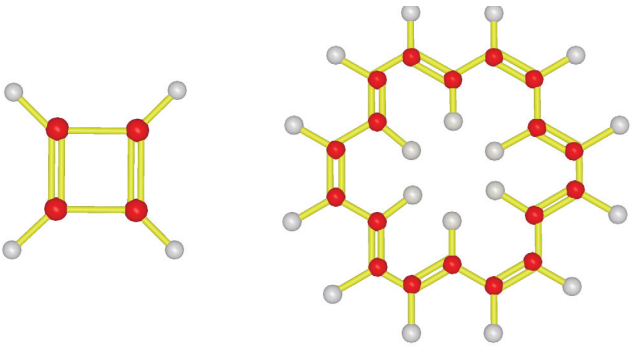
La storia della scoperta della struttura esagonale del benzene è una delle più note e ripetute della scienza, e fu raccontata da Kekulé stesso nel 1890:

> Ero seduto intento a scrivere, ma il lavoro non progrediva: i miei pensieri erano altrove. Girai la sedia verso il camino e mi appisolai. Gli atomi giocavano di fronte ai miei occhi, e il gruppo più piccolo rimase modestamente sullo sfondo. Il mio occhio mentale, reso più acuto da questa ripetuta visione, era ora in grado di distinguere strutture più grandi di multiforme conformazione: lunghe file, talvolta sistemate più strettamente, tutte sinuose e ricurve

come il moto di un serpente. Ma guarda! Che cos'è? Uno dei serpenti aveva afferrato la sua stessa coda, e la forma girava beffardamente davanti ai miei occhi. Come per un lampo improvviso mi svegliai e passai il resto della notte a elaborare la mia ipotesi.

Naturalmente, il poetico richiamo al mitico *ouroboros* era fatto apposta per attirare l'attenzione. Ma più che di un serpente si trattava di una bufala, per mascherare la prosaica verità: nel 1984 furono rinvenute una lettera del 1854 e una pubblicazione del 1858, nelle quali Kekulé citava la struttura esagonale che era già stata proposta da Auguste Laurent per il cloruro di benzoile.

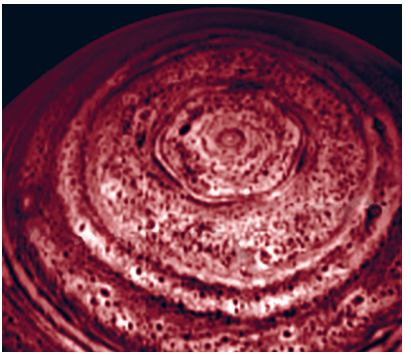
Ma l'attrazione per la struttura del benzene rimane, chiunque l'abbia scoperta. In particolare, perché essa realizza chimicamente un poligono regolare, in maniera analoga a quella dei solidi regolari. Altri esempi di strutture chimiche a poligono regolare sono il *ciclobutadiene* (C_4H_4), con 4 atomi di carbonio disposti a forma di quadrato. E, più in generale, gli *annuleni* ($C_{2n}H_{2n}$ e $C_{2n+1}H_{2n+2}$).

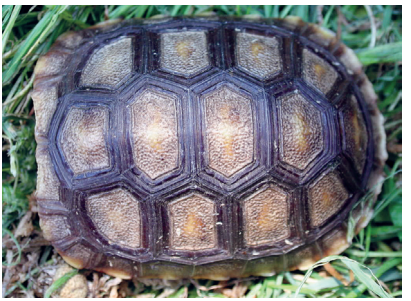
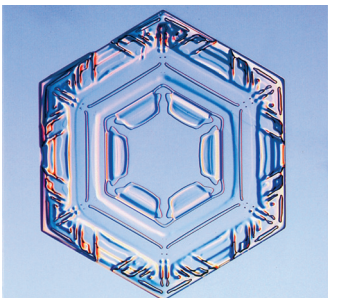


Sia il benzene che il coronene sono stati individuati sulla superficie di Titano, un satellite di Saturno. Nel 1981 la sonda *Voyager 1* ha invece scoperto nell'atmosfera di quest'ultimo il più grande esagono conosciuto: un singolare vortice di quella forma, con un diametro di 25.000 chilometri (il doppio della Terra), in rotazione sul Polo Nord del pianeta.

L'effetto può apparire sorprendente, ma lo diventa meno se si considera che quando si scalda uno strato sottile di fluido fornendo calore dal basso, la convezione produce una struttura esagonale costituita da *celle di Bénard*, scoperte nel 1900 da Henri Bénard.

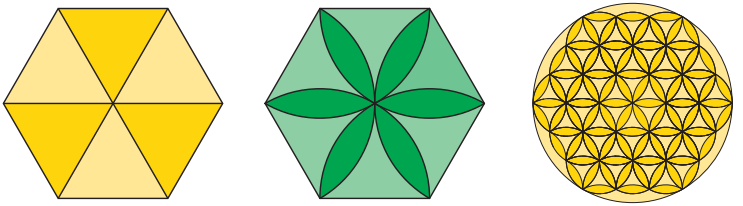
Neanche a casa nostra, però, mancano gli esagoni. Si nascondono nelle strutture dei *sistemi cristallini esagonali*, dal berillio all'hanksite (qui raffigurata), oltre alla già citata grafite. Escono dal mare disegnati come *squame* colorate sul carapace delle tartarughe. E ci piovono candidamente addosso dal cielo durante le nevicate, perché i *fiocchi di neve* esibiscono quasi sempre una simmetria esagonale.



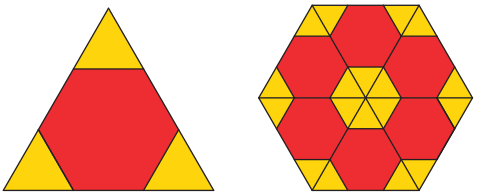



In geometria, infine, gli esagoni costituiscono il poligono più semplice da disegnare, insieme al triangolo equilatero. Il principio della costruzione è lo stesso nei due casi, e mostra che un esagono contiene sei triangoli equilateri.

Concentrandosi sugli archi di cerchio costruiti sui lati, invece che sui lati stessi, si ottiene una figura a sei spicchi nota a molte civiltà antiche, dagli Egizi agli Indiani. E anche a qualche inciviltà moderna, come quella della Padania, che l'ha adottata come suo simbolo col nome di «Sole delle Alpi». La figura si può facilmente iterare, ottenendo quello che viene variamente chiamato «fiore della vita» o «fiore delle Alpi», anch'esso esagonale e contenente 19 copie del seme che lo genera.

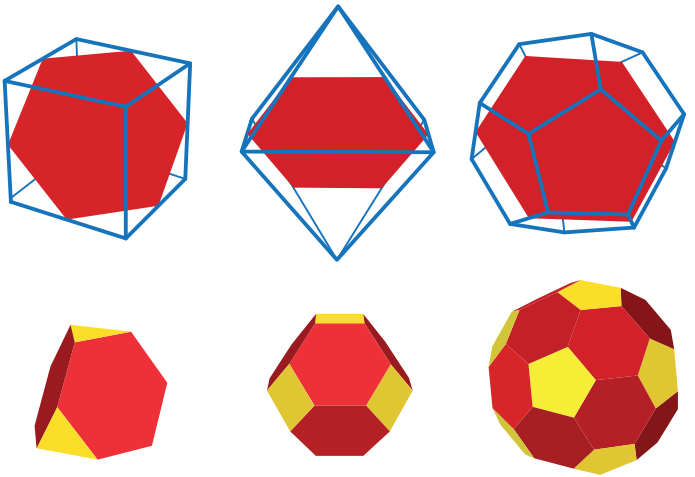


Viceversa, un triangolo equilatero contiene un esagono che occupa due terzi della sua area: per ottenerlo, basta tagliare le punte del triangolo a due terzi dai vertici opposti. Ripetendo la costruzione sui sei triangoli che costituiscono un esagono, si ottengono al suo interno sette esagoni, e altri due si possono costruire con le punte che rimangono. La figura che ne risulta si può quasi considerare una versione matematica della struttura del coronene.



Più sorprendentemente, gli esagoni si trovano anche nei solidi regolari. Non direttamente come facce, perché sappiamo che quelle possono essere solo triangolari, quadrate o pentagonali. Ma nelle sezioni del cubo, dell'ottaedro

e del dodecaedro, ottenute tagliando appropriatamente i lati a metà. E nei solidi semiregolari ottenuti dal tetraedro, ottaedro e dodecaedro, tagliando appropriatamente i vertici.



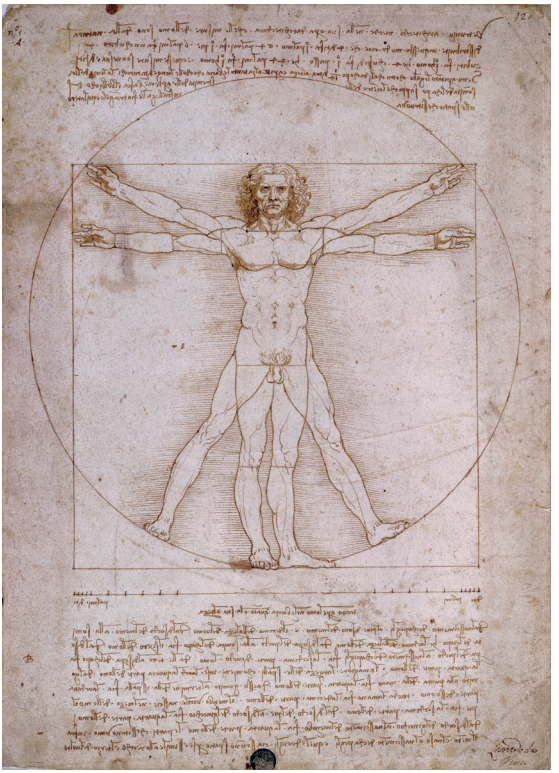
Riflettiamo, prima di continuare

Finora ci siamo limitati a parlare della forma delle piastrelle. Nelle pavimentazioni, però, esse sono spesso decorate, con motivi astratti o figurativi. In tal caso, la forma geometrica di una pavimentazione non basta a caratterizzarla completamente, e bisogna tener conto anche delle possibili simmetrie dei colori.

La parola *symmetria* significava in origine «commensurabilità» (da *sym*, «con», e *metrein*, «misurare»). La sua verifica richiedeva dunque due immagini da paragonare fra loro, e lo strumento più ovvio per produrle era lo specchio. Il che permetteva di definire simmetrico un oggetto identico alla propria immagine riflessa, e simmetrici due oggetti identici l'uno all'immagine riflessa dell'altro.

Era stata probabilmente la *fisiologia* a fornire un primo esempio approssimato di simmetria speculare, perché quasi tutti gli organi principali si presentano a coppie, uno per lato. Il più noto emblema di questa simmetria umana è il

disegno di Vitruvio, reso popolare da Leonardo, che raffigura il corpo con le gambe e le braccia divaricate, dentro un cerchio e un quadrato, i cui centri coincidono all'incirca con l'ombelico.



Leonardo da Vinci, *L'uomo di Vitruvio*, 1490 ca.

A uno sguardo più attento, però, la simmetria del corpo, umano o animale, non è perfetta. Una notevole eccezione alla duplicazione degli organi è il cuore. Non solo perché è uno, ma perché tende regolarmente a sinistra: anche quello di Berlusconi e Benedetto XVI, se ce l'hanno.

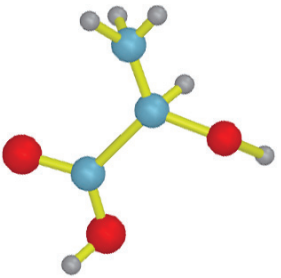
Per accorgersi di quanto le nostre due metà siano diverse fra loro, non c'è bisogno di un'autopsia: basta provare a riflettere il viso in uno specchio verticale posto

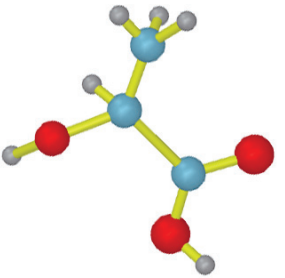
fra gli occhi. Se ci pettiniamo con una riga, ad esempio, ci ritroviamo con due, o senza nessuna. E lo stesso succede con la punta del naso, se non l'abbiamo perfettamente diritto.





In *chimica*, diverse molecole esistono in forme speculari dette *eniantiomere* (da *enantios*, «opposto», e *meros*, «parte»), o *chirali* (da *cheir*, «mano»). Esse differiscono per la proprietà di ruotare il piano della luce polarizzata a destra o a sinistra, rispetto alla direzione di incidenza. Un esempio è l'acido lattico, raffigurato qui nelle due versioni, di cui solo la seconda (destrogira) viene prodotta dall'attività anaerobica dei muscoli.





In *biologia* le α-eliche delle proteine e le doppie eliche del DNA sono quasi sempre destrogire, mentre gli amminoacidi degli organismi quasi sempre levogiri. Benché si tratti probabilmente della fissazione evolutiva di una selezione casuale, ormai destra e sinistra non si possono più scambiare fra loro.

In *Attraverso lo specchio e quel che Alice vi trovò* la bambina si domanda: «forse il latte speculare non sarebbe buono da bere». Effettivamente, non solo avrebbe un gusto diverso, ma non sarebbe neppure assimilabile. In un mondo speculare, cioè, probabilmente moriremmo presto di fame.



Alice passa attraverso lo specchio, illustrazione di John Teniell
da *Attraverso lo specchio e quel che Alice vi trovò* di Lewis Carroll, 1871.

Alice non sembra invece preoccuparsi di come il mondo speculare appaia a livello *fisico*, cioè atomico o subatomico. Giustamente, perché a questo livello ci sono difficoltà oggettive ad accorgersi di un passaggio attraverso

lo specchio. Nessun fenomeno gravitazionale, elettromagnetico o nucleare forte (relativo, cioè, alla coesione delle particelle negli atomi) permette infatti di scoprire una differenza fra destra e sinistra.

Nel 1956 i fisici Tsung-Dao Lee e Chen Ning Yang, vincitori del Nobel l'anno successivo, scoprirono però che una tale differenza esiste al livello dei fenomeni nucleari deboli: cioè, nel decadimento radioattivo. Un tipico esempio di fenomeno non speculare è il senso, rigorosamente antiorario rispetto alla direzione del moto, della rotazione (detta *spin*) dei neutrini. Alice avrebbe dunque dovuto vedere i neutrini ruotare nella direzione oraria.

L'unica cosa di cui si accorge, invece, è che la poesia *Jabberwocky* è illeggibile, a meno che non la si rifletta a sua volta in uno specchio, alla maniera della scrittura di Leonardo.

Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

C'è però un genere di scrittura che, benché non letteralmente speculare, lo è idealmente. Si tratta del *palindromo* (da *palin*, «all'indietro», e *dromos*, «corsa»), che si può leggere in entrambe le direzioni: dall'inizio alla fine, o viceversa.

«Onorarono» è il più lungo palindromo non artificiale in italiano, e uno dei più belli «i topi non avevano nipoti». Uno dei più belli in inglese è invece *A man, a plan, a canal: Panama*, «Un uomo, un progetto, un canale: Panama», che descrive il coinvolgimento del presidente Theodore Roosevelt nella costruzione del famoso canale. Esistono anche intere opere palindromiche, come *9691* di Georges Perec, o *11 luglio 1982* di Giuseppe Varaldo, ma non si può negare che si tratta di imprese un po' grottesche.

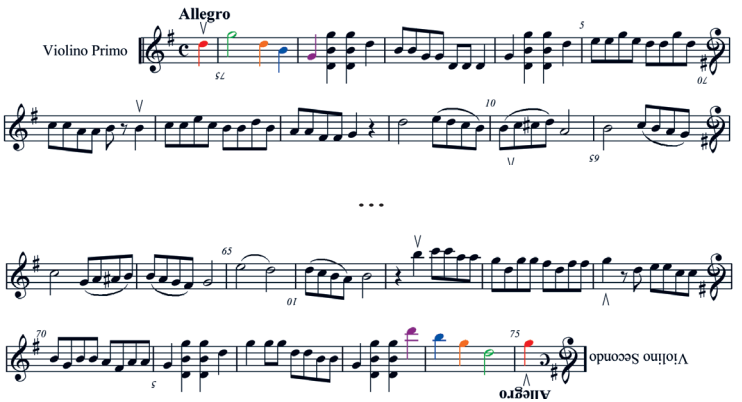
In *musica*, invece, il processo non solo funziona perfettamente, ma è tipico sia del barocco che della dodecafonia. Riflettendo uno spartito in uno specchio perpendicolare o parallelo al pentagramma, si ottengono infatti, rispettiva-

mente, brani *retrogradi* o *inversi*. Se poi si combinano le due riflessioni, si ottengono brani *retrogradi inversi*, o *inversi retrogradi*. E i quattro tipi si possono riassumere in una tabella dei «moti canonici»:

semplice o retto b ↗	retrogrado ↖ d
p ↘ inverso	↙ q retrogrado inverso

Naturalmente, se uno prende spartiti a caso e «di qua, di là, di giù, di su li mena», in genere non ottiene affatto musiche interessanti, o anche solo ascoltabili. Ma se è Bach e sa cosa fa, produce canoni sublimi, come i nove delle *Variazioni Goldberg*, i quattordici *Sulle prime otto note dell'Aria delle Variazioni Goldberg*, i dieci dell'*Offerta musicale* e i quattro dell'*Arte della fuga*. Cioè, il meglio del contrappunto settecentesco.

Se invece uno è Mozart, scrive un canone a specchio, che è stato trascritto come *Scherzo-duetto per due violini* su un solo foglio, in modo che gli esecutori lo leggano nel modo consueto, ma da parti opposte del foglio. Essi suonano dunque la musica in direzioni contrarie: uno da capo al fine, e l'altro al contrario.



La composizione è in Sol maggiore, per un ovvio motivo: l'accordo fondamentale di questa tonalità consiste delle tre note Sol, Si e Re, che si trovano sulle tre righe centrali del pentagramma. Dunque, l'accordo rimane lo stesso da qualunque dei due lati del foglio lo si guardi.

Se uno è Franz Joseph Haydn, poi, scrive la *Sinfonia n. 47*, detta *Palindrome*, perché il minuetto e il trio sono appunto palindromici. Così come i «minuetti in canone e trii al rovescio» della *Serenata in Do minore* (KV 388) e del *Quintetto in Do minore* (KV 406) di Mozart.

Se infine uno è Paul Hindemith, compone la breve opera palindromica *Hin und zurück*, «Avanti e indietro». La scena inizia pacatamente in cucina a colazione, ma degenera quando il marito scopre che la moglie ha un amante: prima uccide lei, e poi si suicida buttandosi dalla finestra. Arriva però una specie di santone-filosofo, che fa tornare gli eventi indietro, verso la resurrezione dei due e il lieto fine, mentre anche la musica e le liriche si capovolgono. L'opera finisce con la stessa nota, e sullo stesso tono, con cui era iniziata.

Fianco sinistro, avanti march!

Dalla tabella dei moti canonici vediamo che, riflettendo verticalmente la lettera b, otteniamo la lettera d. Riflettendola orizzontalmente, otteniamo la lettera p. Ruotando il foglio di 180 gradi, oppure guardandolo dall'altra parte del tavolo, vediamo infine una q.

Naturalmente, la cosa non cambia se partiamo da una qualunque delle lettere b, d, p e q. Ad esempio, la q si può ottenere riflettendo p verticalmente, o d orizzontalmente, e così via. In un senso preciso, le quattro lettere hanno dunque tutte la stessa forma, benché orientata in maniera diversa.

Le operazioni che abbiamo appena eseguito sulle quattro lettere si chiamano, per ovvi motivi, *riflessioni* e *rotazioni*. E si può subito notare che *la rotazione si può ridurre a*

due riflessioni, e si potrebbe dunque evitare. Ad esempio, se dapprima riflettiamo b verticalmente, ottenendo d, e poi riflettiamo d orizzontalmente, otteniamo q senza rotazioni, appunto. Non sarebbe invece possibile evitare le riflessioni, perché non c'è modo di ruotare b o q per farle diventare d o p.

Consideriamo ora non più singole lettere, ma parole: cioè, sequenze di lettere. Ad esempio, in «bdb» la d è una doppia riflessione verticale delle due b, di sinistra e di destra. Il che significa che la b di sinistra può essere spostata sulla b di destra, o viceversa, mediante due riflessioni. Un movimento di questo genere viene chiamato *traslazione*, e abbiamo appena osservato che *una traslazione si può ridurre a due riflessioni*.

Analogamente, nella parola «bp», la p si può considerare come uno spostamento orizzontale di una b che ha subìto una riflessione. In questo caso si dice che b ha subìto una *glissoriflessione*, o «riflessione scivolata» (dal francese *glisser*, «scivolare»). E abbiamo appena osservato che *una glissoriflessione si può ridurre a una riflessione, seguita da una traslazione*.

Poiché questi esempi mostrano che la riflessione ha un ruolo centrale, si può definire la simmetria geometrica, o *isometria* (da *isos*, «uguale», e *metrein*, «misurare»), cioè una trasformazione che conserva le distanze e gli angoli, come un qualunque movimento che si ottenga mettendo insieme delle riflessioni. E due figure sono geometricamente simmetriche, o isometriche, se è possibile passare da una all'altra mediante una simmetria geometrica.



Ad esempio, le impronte dei piedi di un soldato sull'attenti sono simmetriche, perché legate da una riflessione. Se il soldato effettua un fianco-destro o un fianco-sinistro

senza spostarsi, le impronte del piede su cui ha ruotato sono legate da una rotazione. Se invece il soldato è in marcia, le impronte dello stesso piede sono legate da una traslazione, e quelle di piedi diversi da una glissoriflessione.

I tipi di simmetrie che abbiamo considerato non sono stati scelti a caso. Si può infatti dimostrare che *ogni simmetria geometrica, cioè la concatenazione di un numero arbitrario di riflessioni, è equivalente a una sola riflessione, o una sola rotazione, o una sola traslazione, o una sola glissoriflessione*. I quattro tipi forniscono dunque una classificazione completa delle simmetrie, anche se a prima vista sembrerebbero essercene altre.

Ad esempio, la simmetria che sposta orizzontalmente una b in una d sembra richiedere una riflessione verticale e una traslazione orizzontale. Ma in realtà si può effettuare mediante una sola riflessione verticale, in uno specchio posto a metà distanza fra la b di partenza e la d di arrivo.

Una volta introdotte e classificate le simmetrie geometriche, possiamo usarle per determinare il grado di simmetria di una figura. In particolare, possiamo dire che una figura è tanto più simmetrica quante più sono le simmetrie che la lasciano invariata. Naturalmente, ci sono delle restrizioni alle possibili combinazioni di simmetrie, perché:

- Le traslazioni e le glissoriflessioni muovono tutte le lettere.
- Le rotazioni lasciano una lettera nello stesso posto: quella attorno a cui si ruota.
- Le riflessioni lasciano un'intera riga nello stesso posto: quella rispetto a cui si riflette.

Inoltre, come abbiamo già notato, le rotazioni e le traslazioni non cambiano il verso di una lettera (b può diventare q, ma non d o p), mentre le riflessioni e le glissoriflessioni sì.

La croce e la svastica

Incominciamo a considerare le figure che ammettono simmetrie rotazionali. Ad esempio, la lettera I è lasciata invariata da due riflessioni e due rotazioni. La lettera Y, se disegnata regolare, da tre riflessioni e tre rotazioni. E la lettera X, se disegnata regolare, da quattro riflessioni e quattro rotazioni. In generale, una *croce regolare* con n semibraccia uguali è lasciata invariata da n rotazioni e n riflessioni, e la stessa cosa succede per il *poligono regolare* di n lati.

Analogamente, le lettere N e Z sono lasciate invariate da due rotazioni. E una *croce regolare uncinata* con n semibraccia uguali, da n rotazioni. Non da riflessioni, ovviamente, perché esse invertirebbero il senso di rotazione degli uncini. Ritroviamo la croce regolare nella bandiera della Svizzera, mentre due croci uncinate note dai tempi antichi sono la trinacria a tre braccia, simbolo della Sicilia e dell'isola di Man, e la svastica a quattro braccia, antico simbolo indiano di prosperità e di fortuna, divenuta poi emblema del partito nazista.



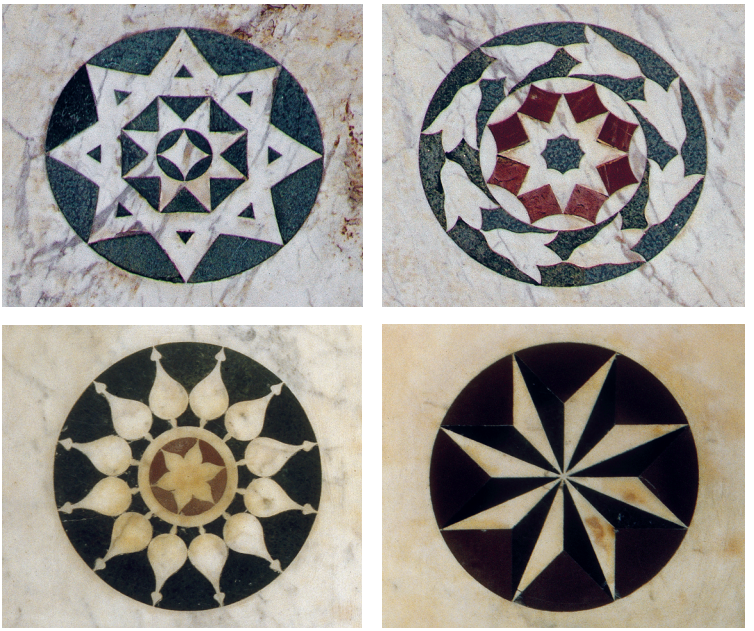
Ancora una volta, questi esempi sono caratteristici. Leonardo ha infatti dimostrato che essi costituiscono i soli tipi di simmetrie possibili per i *rosoni*, le *volte* o le *cupole*. Per quelle figure, cioè, come le finestre delle cattedrali gotiche, o le decorazioni dei capitelli o dei foulard, che ammettono soltanto un numero finito di simmetrie e un centro: ossia, un punto che non viene mosso da nessuna di queste simmetrie.



Cupole della Round Church nella Temple Church a Londra
e dell'abbazia di Sainte-Foy a Conques in Francia.

Per classificare il tipo di simmetria di un rosone, dunque, bastano due informazioni. Anzitutto, bisogna determinare il numero di spicchi che si ripetono: cioè, il numero di possibili rotazioni. E poi, bisogna verificare se il rosone appaia o no uguale, quando lo si guarda dai due lati

del muro: cioè dall'esterno o dall'interno dell'edificio. Se la risposta è no, non ci sono riflessioni. Se invece è sì, allora ce ne sono tante quante le rotazioni.



Rosoni in marmo intarsiato della facciata di Santa Maria Novella e, in basso, del Tempietto del Santo Sepolcro in San Pancrazio a Firenze, realizzati da Leon Battista Alberti nel XV secolo. I rosoni a sinistra sono di tipo simmetrico e quelli a destra di tipo asimmetrico.

Per quanto riguarda il cerchio, esso è lasciato invariato da infinite rotazioni, di qualunque grado di ampiezza, e da infinite riflessioni, rispetto a qualunque diametro. Il che conferma l'intuizione degli antichi, che sia la figura con il massimo grado di simmetria.

Greche egizie e arabe

Passiamo ora alle figure che, come i rosoni, ammettono un numero finito di tipi di simmetrie. Ma nelle quali, diversamente dai rosoni, nessun punto rimane invariato.

Tra le simmetrie di queste figure ci deve sempre essere almeno una traslazione: infatti, se c'è una glissoriflessione, basta applicarla due volte per ottenere una traslazione. Queste figure non possono dunque essere finite, come le precedenti.

Inoltre, poiché stiamo considerando figure su un piano bidimensionale, ogni traslazione si può scomporre al massimo in due traslazioni canoniche: una orizzontale e una verticale.

Iniziamo a considerare il caso di una sola traslazione, che riguarda composizioni di lettere su una sola riga. Poiché la composizione risulta invariata dopo una traslazione, dev'essere costituita di una parte finita che si ripete all'infinito. Siamo dunque in presenza di un *fregio* o *greca*, del tipo usato per le decorazioni periodiche unidimensionali, dagli zoccoli dei muri alle sciarpe.

In teoria ci potrebbero essere $2^4 = 16$ tipi di fregi, perché altrettante sono le possibili combinazioni di invarianza o meno rispetto a rotazioni, riflessioni orizzontali o verticali, e glissoriflessioni. In pratica, però, alcune combinazioni sono impossibili. Ad esempio, abbiamo già osservato che avendo riflessioni orizzontali e verticali si hanno anche rotazioni. Analogamente, non si può avere una riflessione orizzontale senza una glissoriflessione, perché stiamo supponendo che ci sia comunque una traslazione orizzontale.

Esaminando tutti i casi, si dimostra che *esistono esattamente 7 tipi diversi di fregi*, che si possono esemplificare nel modo seguente:

FFFFFFFF	↗ ↗ ↗ ↗
TTTTTTTT	↗ ↖ ↗ ↖
ZZZZZZZ	↗ ↙ ↗ ↙
EEEEEEEE	→ → → →
HHHHHH	↔ ↔ ↔ ↔
bpbpbpbpb	↗ ↘ ↗ ↘
bdpqbdpqb	↗ ↖ ↘ ↙

La prima riga è lasciata invariata solo da traslazioni. La seconda, da traslazioni e riflessioni. Oltre che dalle traslazioni, la terza riga è lasciata invariata da rotazioni di 180 gradi. La quarta, da riflessioni orizzontali. La quinta, da riflessioni orizzontali e verticali. La sesta, da glissoriflessioni. E la settima, da riflessioni verticali e rotazioni di 180 gradi.

Il caso di due traslazioni riguarda non più singole righe, ma pagine infinite, in cui si ripetono configurazioni bidimensionali di lettere. Siamo questa volta in presenza di *mosaici* o *pavimentazioni* del tipo usato per le decorazioni periodiche bidimensionali, dalle piastrellazioni alle tappezzerie ai tappeti.

La classificazione di tutti i possibili tipi di mosaici è analoga a quella appena vista per i fregi, benché molto più complicata. Nel 1891 il cristallografo russo Evgraf Fëdorov ha infatti dimostrato che questa volta *esistono esattamente 17 tipi diversi di mosaici*, che ammettono soltanto le simmetrie rotazionali derivate dalle piastrellazioni regolari: cioè, quelle corrispondenti ad angoli di 60, 90, 120 e 180 gradi (a destra o a sinistra). Sorprendentemente, quasi tutti i 17 tipi sono stati usati sia negli affreschi egizi delle tombe nella Valle dei Re, sia nelle decorazioni moresche dell'Alhambra da cui eravamo partiti.

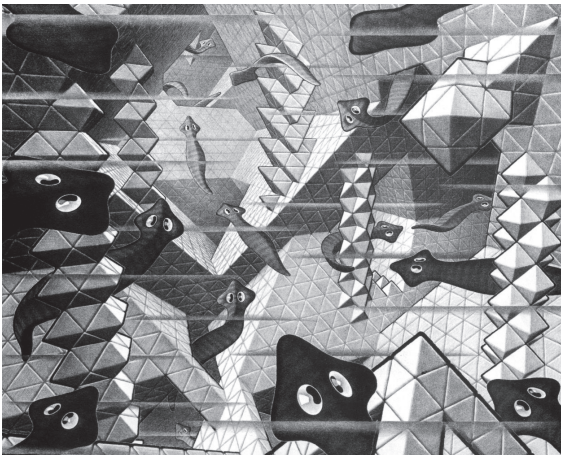
In tempi moderni, Escher ha fatto della pavimentazione la sua forma d'arte. Egli fu avvantaggiato, rispetto agli Arabi, perché poteva usare figure di animali, specialmente pesci e uccelli. E anche perché, mentre gli Egizi e i Mori dovettero scoprire da soli i 17 possibili tipi di mosaici, a lui li fece conoscere il fratello, che era professore di geologia. Escher, però, riscoprì autonomamente le *pavimentazioni cromatiche*, che sono di grande interesse non soltanto per gli artisti, ma anche per i cristallografi. In particolare, ritrovò 14 delle 46 possibili piastrellazioni del piano a due colori, classificate dal matematico Henry Woods nel 1936.



Esempi dei 17 tipi di mosaici planari che il cristallografo russo Evgraf Fëdorov classificò nel 1891.

Cristalli sognanti

Passando dal piano allo spazio, i poligoni cedono il posto ai solidi. L'unico dei solidi regolari in grado di ricoprire da solo l'intero spazio è il cubo. Ma tetraedro e ottaedro possono farlo congiuntamente, in una pavimentazione solida illustrata da Escher in *Platelminti*.

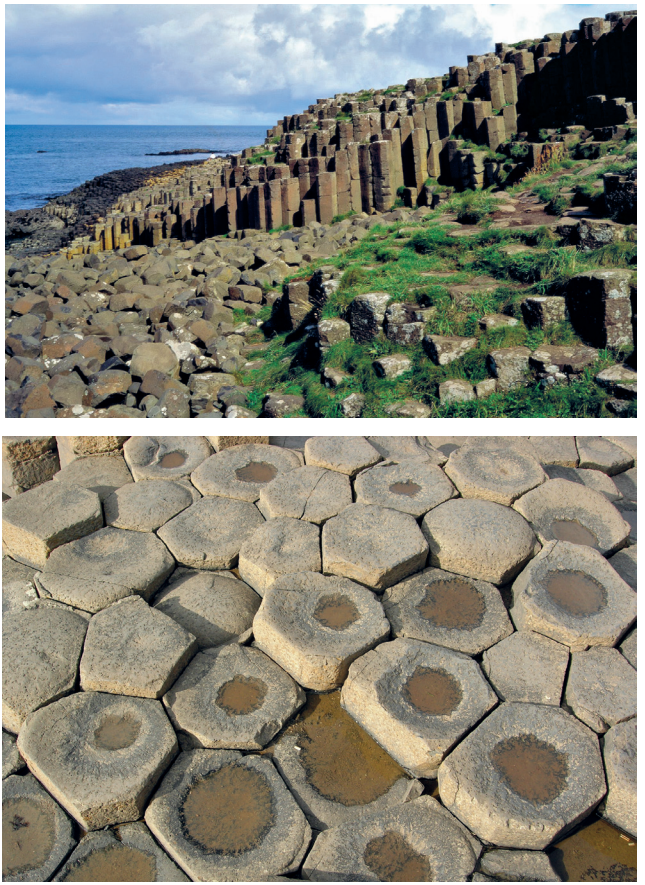


Maurits Cornelis Escher, *Platelminti*, 1959.

Dei solidi semiregolari, l'unico in grado di ricoprire da solo l'intero spazio è invece l'ottaedro troncato. Ma *esistono esattamente 28 pavimentazioni uniformi convesse*, che combinano appunto in maniera uniforme (cioè, con la stessa disposizione attorno ai lati e ai vertici) i solidi regolari o semiregolari, e i prismi a basi regolari o semiregolari.



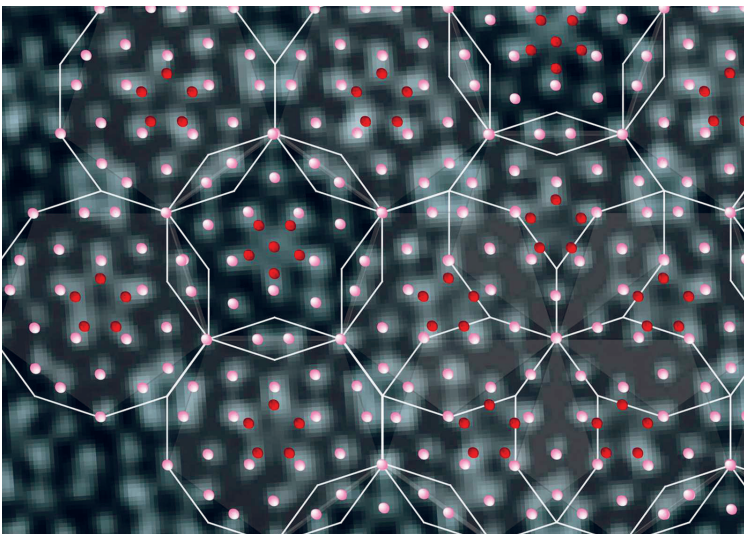
Gli 11 prismi a basi regolari o semiregolari producono versioni tridimensionali delle 11 pavimentazioni regolari o semiregolari del piano. Queste pavimentazioni sono particolarmente interessanti, perché mostrano come lo spazio si possa ricoprire «a strati», semplicemente sovrapponendo pavimentazioni planari. Poiché così si formano i cristalli, le pavimentazioni dello spazio trovano appunto la loro applicazione canonica in cristallografia. Ma anche nella foliazione delle rocce in geologia, come dimostra la spettacolare formazione del Selciato del Gigante in Irlanda.



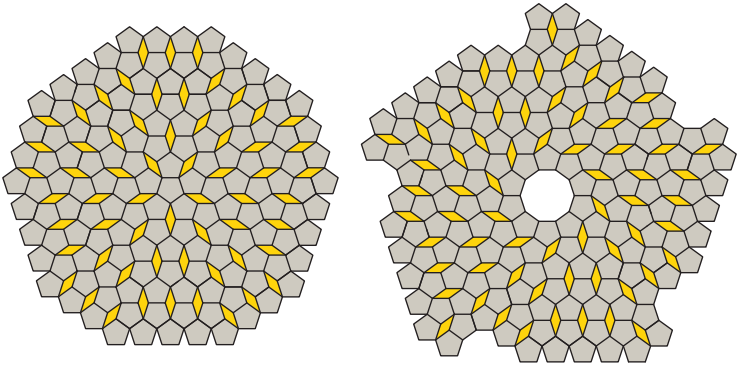
Il Selciato del Gigante in Irlanda.

Nel 1891 Fëdorov ha dimostrato che, così come ci sono 7 tipi di fregi lineari, e 17 tipi di mosaici planari, *esistono esattamente 230 tipi diversi di cristalli*. E poiché nelle tre direzioni spaziali i cristalli esibiscono simmetrie planari, le possibili rotazioni che li lasciano invariati possono solo essere le stesse dei 17 tipi di mosaici, corrispondenti agli angoli di 60, 90, 120 e 180 gradi (a destra o a sinistra).

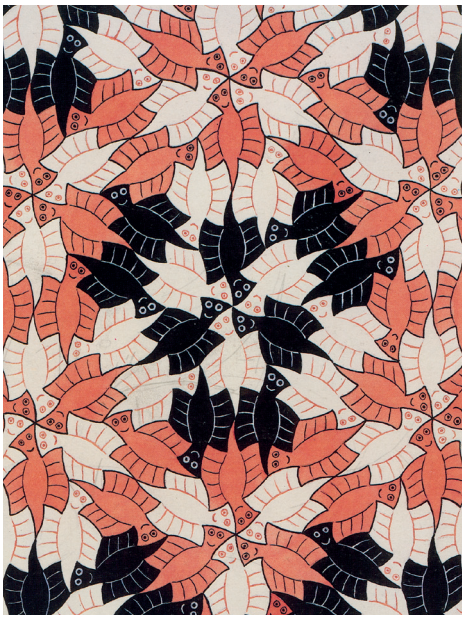
Nel 1984 il cristallografo Daniel Schechtman, premio Nobel per la chimica nel 2011, ha però scoperto una lega di alluminio e manganese, la cui struttura molecolare esibisce una simmetria di rotazione pentagonale, corrispondente a un angolo di 108 gradi. Queste strutture sono state chiamate *quasicristalli*, e costituiscono versioni spaziali di particolari pavimentazioni planari non periodiche, cioè senza simmetrie traslazionali.



Che ci siano pavimentazioni non periodiche del piano, è ovvio: basta considerare piastrelle che ricoprano il piano espandendosi in maniera radiale, o spiraliforme. Ad esempio, le due seguenti, la prima delle quali si trova nel *Trattato sulla misura con riga e compasso* di Dürer, del 1525, e l'altra è una sua variazione.



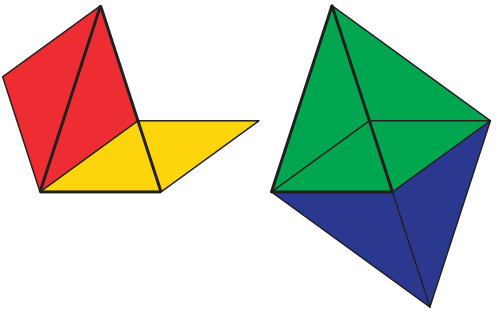
Meno ovvio è che esistano *piastrelle che permettono di pavimentare l'intero piano, ma soltanto in maniera non simmetrica*: cioè, la piastrella è unica, ma non può essere usata sempre allo stesso modo. La loro esistenza è stata dimostrata nel 1935 dal matematico tedesco Heinrich Heesch. E un esempio è illustrato da Escher in *Fantasmi*, dove si nota appunto che alcuni fantasmi sono raggruppati, mentre altri sono isolati.



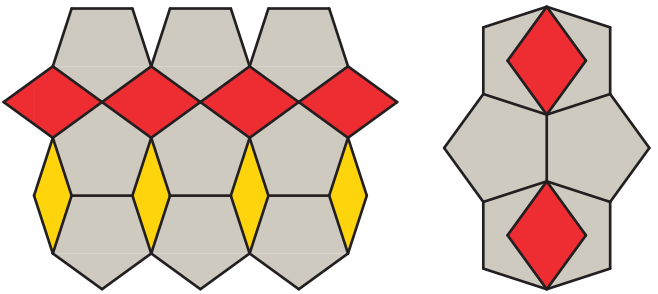
Maurits Cornelis Escher, *Fantasmi*, 1971.

Ancora meno ovvio è che esistano *piastrelle che permettono di pavimentare l'intero piano, ma soltanto in maniera non periodica*. La loro esistenza fu dimostrata nel 1966 dal tedesco Robert Berger, in maniera complicata e indiretta.

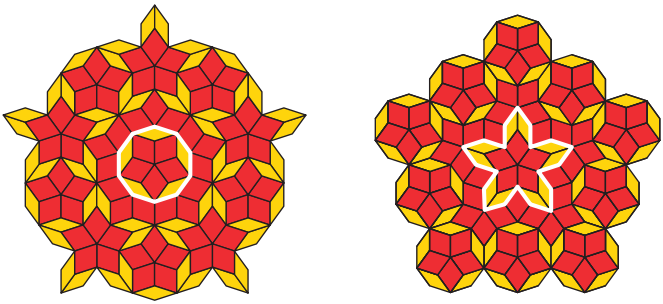
Nel 1974 l'inglese Roger Penrose semplificò radicalmente l'esempio di Berger, usando due serie alternative di due sole piastrelle ciascuna, ottenute entrambe dal triangolo aureo nella maniera indicata nelle due figure.



Alternativamente, le due piastrelle della prima serie si possono considerare come il risultato di due ovvi tentativi di piastrellare il piano mediante pentagoni. Nel primo, che è un'ulteriore variazione di quello di Dürer visto poco sopra, i pentagoni vengono semplicemente allineati lungo le basi e i vertici, e gli spazi che essi lasciano liberi generano le due piastrelle di Penrose. Nel secondo, i pentagoni vengono invece accavallati, e la loro sovrapposizione ne genera una sola.

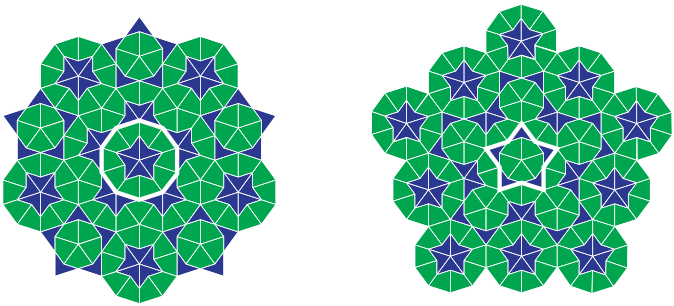


Naturalmente, ciascuno dei due rombi di Penrose può ricoprire da solo il piano in maniera periodica, come qualunque quadrilatero. Il trucco di Penrose è stato di inserirvi delle scanalature che permettono soltanto alcune delle loro possibili combinazioni, in modo da forzare le piastrelle a espandersi radialmente in forma pentagonale. Da un lato, questo permette che l'intero piano venga pavimentato. Dall'altro, impedisce però che la pavimentazione sia periodica.



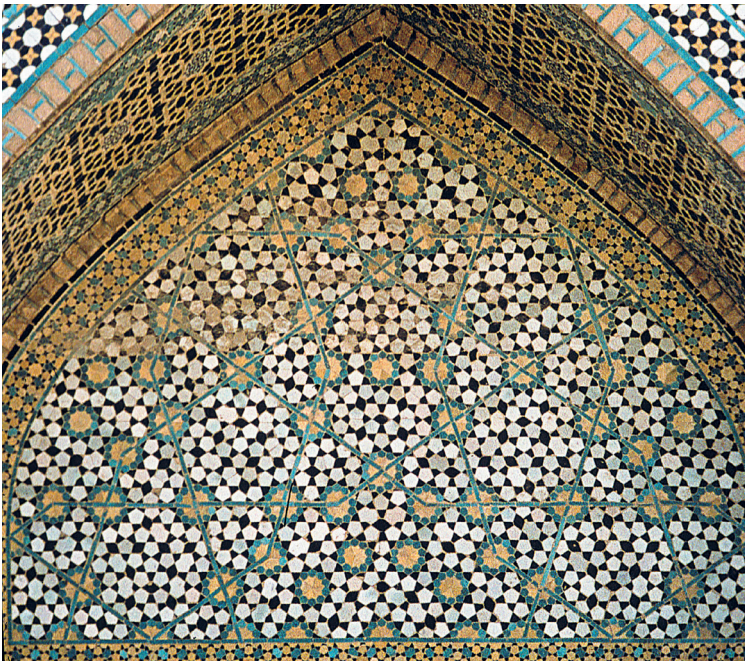
Per quanto riguarda la seconda serie di piastrelle di Penrose, la restrizione alle loro possibili combinazioni è semplicemente che due piastrelle adiacenti non devono formare un unico parallelogramma.

Le piastrelle di questa seconda serie sono duali delle precedenti. È dunque possibile passare da una piastrellazione del primo tipo a una del secondo, e viceversa.



Benché questi risultati risalgano alla seconda metà del Novecento, recentemente si è scoperto che le pavimenta-

zioni non periodiche erano già state trovate e usate nel Quattrocento dagli Arabi. Questa volta, però, non in Spagna, bensì in Turchia, Iran e Uzbekistan, a testimonianza della loro versatilità in queste faccende.



Esempio di tassellazione non periodica nell'arco del santuario Darb-i Imam a Isfahan in Iran, 1453.